



## Chapeaux secrets et multiplication des chiffres

Jean-Paul Delahaye<sup>1</sup>

---

*La rubrique récréation informatique comporte deux parties. Dans la première, on pose de petites énigmes algorithmiques ou liées aux aspects combinatoires de l'informatique dont la solution est donnée dans le numéro suivant de la revue. Dans la seconde partie, on soumet des problèmes impliquant un vrai travail de programmation et conduisant parfois à de longs calculs. Le but est de résoudre une question dont la solution n'est pas connue, ou de battre un record.*

### Rappel et solution du problème précédent

Dans le numéro 1 du bulletin, on proposait une énigme – pas si évidente que cela ! – due à John Conway.

Une liste de noms – longue mais finie – est lue à voix haute, certains noms sont répétés plusieurs fois. Vous écoutez cette liste. Votre mémoire vous permet de mémoriser un seul nom à la fois (que vous pouvez comparer à celui qui vient ensuite) et un entier qui peut vous servir de compteur (vous ne pouvez que l'augmenter ou le diminuer d'une unité à la fois). La liste lue comporte un nom majoritaire – il apparaît dans plus de la moitié des cas. Comment devez-vous faire pour que lorsque la lecture se termine, vous sachiez quel est ce nom majoritaire ?

**SOLUTION.** Au départ, l'entier mémorisé (le compteur) est 0. Le premier nom entendu est mis en mémoire et le compteur est incrémenté d'une unité. Ensuite :

(a) si le compteur est différent de 0 et que vous entendez le nom que vous avez en mémoire, vous incrémentez le compteur,

---

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR 8022 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. E-mail : delahaye@lifl.fr.

- (b) si le compteur est différent de 0 et que vous entendez un nom différent de celui mémorisé, vous décrémentez le compteur,
- (c) si le compteur est 0, procédez comme au départ : mémorisez le nom entendu et incrémentez le compteur.

Lorsqu'il n'y a pas de nom majoritaire l'algorithme ne produit rien de bien intéressant ; mais lorsqu'il y a un nom majoritaire, c'est bien lui qui se trouve en mémoire à la fin de l'énumération.

Pour le démontrer, on considère d'abord une énumération ne comportant que deux noms, par exemple

$$A A B B B A A,$$

qui provoque les états suivants de votre mémoire

$$A-1 A-2 A-1 A-0 B-1 B-0 A-1.$$

On montre qu'un zéro correspond à une situation d'équilibre entre les deux noms, et qu'un entier positif  $k$  dans le compteur signifie que le nom mémorisé s'est présenté à cet instant  $k$  fois de plus que l'autre nom. Lorsqu'il y a plus de deux noms (dont un majoritaire), on compare la suite des états de la mémoire avec celle obtenue quand on remplace tous les noms non majoritaires par un seul.

### Nouveau problème

Un arbitre dépose au hasard des chapeaux sur les têtes de  $N$  joueurs. Un joueur ne peut voir le chapeau qu'il a sur la tête. Les couleurs possibles des chapeaux sont prises parmi  $N$ , mais plusieurs des chapeaux utilisés peuvent avoir la même couleur. « Au hasard » signifie précisément que l'arbitre tire avec une roue de loterie équitable à  $N$  cases la couleur du chapeau de chaque joueur.

L'arbitre interroge alors les  $N$  joueurs de l'assemblée qui répondent en même temps (ils écrivent par exemple leur réponse sur un papier au même instant). Les joueurs ont pu avant le jeu convenir d'une méthode de jeu, mais pendant le jeu, ils ne peuvent échanger aucune information. Chaque joueur essaie de deviner la couleur du chapeau qu'il a sur la tête. Si l'un d'eux réussit, alors l'assemblée des joueurs gagne un voyage collectif gratuit... au prochain congrès de la SIF.

On vérifie sans peine que, si les joueurs jouent au hasard, ils ont une probabilité de gagner de :

$$1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N.$$

Cette suite a pour limite  $1 - \frac{1}{e} = 0,6321\dots$ , ce qui signifie qu'en gros les  $N$  joueurs, s'ils jouent au hasard (et sont assez nombreux), gagnent avec une probabilité de 63%. C'est assez bien, mais s'ils sont malins, ils peuvent être certain à 100% de gagner.

*Quel algorithme de jeu (convenu entre eux avant que l'arbitre pose les chapeaux) doivent-ils appliquer pour cela ?*

## Carré géomagique et persistance des nombres

Le problème plus difficile posé dans le premier numéro et qui portait sur une nouvelle catégorie de carrés magiques<sup>2</sup> n'a pas reçu de réponse pour l'instant.

Voici cependant d'autres défis... peut-être plus faciles.

On prend un nombre entier  $N$ , par exemple  $N = 377$ . On en multiplie les chiffres :

$$377 \rightarrow 3 \times 7 \times 7 = 147.$$

On recommence jusqu'à arriver à un chiffre unique :

$$377 \rightarrow 147 \rightarrow 28 \rightarrow 16 \rightarrow 6.$$

La longueur de la suite obtenue (sans compter le point de départ) se nomme la *persistance* (multiplicative en base 10) de  $N$ . La persistance de 377 est donc 4.

Aujourd'hui personne n'a jamais trouvé de nombre ayant une persistance supérieure à 11. Le nombre 277777788888899 est le plus petit entier ayant une persistance de 11<sup>3</sup>.

On ne sait pas démontrer non plus que 11 est le maximum possible. On sait seulement qu'aucun nombre inférieur à  $10^{500}$  n'a une persistance dépassant 11 (record de Francesco de Comitè, juin 2013).

*Aller au-delà de  $10^{500}$  est sans doute possible.  
Un lecteur saura-t-il y arriver ?*

Si on ne prend pas en compte les '0' présents dans un nombre (exemple : 741205  $\rightarrow$  280  $\rightarrow$  16  $\rightarrow$  6), cela définit la *persistance à la Erdős* (car c'est Paul Erdős qui en a proposé l'idée).

Aujourd'hui, le mystère concernant la persistance à la Erdős est encore plus grand que celui concernant la persistance : il est possible qu'il n'y ait aucun maximum. On connaît un nombre ayant une persistance à la Erdős de 24 qui est 8...8, le '8' étant répété 314985 fois (record de Marc Lapierre, novembre 2013). On doit, assez facilement, pouvoir dépasser 24...

### Bibliographie.

Jean-Paul Delahaye, La persistance des nombres, *Pour la science*, n° 430, pp. 80-85, août 2013. <http://www.lifl.fr/~delahaye/pls/2013/237.pdf>

---

2. Voir [www.societe-informatique-de-france.fr/bulletins/1024/1/1024-numero-1-recreation.pdf](http://www.societe-informatique-de-france.fr/bulletins/1024/1/1024-numero-1-recreation.pdf)

3. Voir <http://oeis.org/A003001>